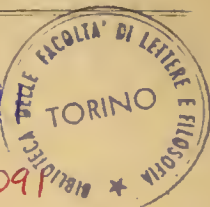


Opusc. PA-I-209

48119/2091

84309



I teoremi funzionali nel calcolo logico.

La questione di sapere se nel calcolo logico esistano o no funzioni legate da speciali teoremi (per es. additivi, moltiplicativi ... o ancor più complicati), si riduce al vedere se vi sono delle funzioni f , che soddisfanno ad un'equazione

$$(1) \dots G\{f[\psi(a, b)], f(a), f(b)\} = 0 \quad (^1),$$

ove G è la relazione che lega la $f[\psi(a, b)]$ con le $f(a)$ e $f(b)$, ψ esprime la natura del teorema funzionale, a e b sono quantità logiche qualsivoglia.

Risolvendo l'equazione (1) per $f[\psi(a, b)]$ avremo:

$$(2) \dots f[\psi(a, b)] = \varphi[f(a), f(b)]$$

dove, com'è noto, φ contenendo, oltre le variabili, alcune quantità indeterminate, può assumere infiniti valori. Pertanto vi sarà, in generale, un numero infinito di soluzioni e, quindi, di funzioni f , che godono una comunque data proprietà funzionale ψ . Importa determinarle.

All'uopo si sviluppi il membro a sinistra, della (2), per $\psi(a, b)$ e quello a destra per $f(a)$ e $f(b)$:

$$f(1)\psi(a, b) + f(0)\psi_1(a, b) = \varphi(1, 1)f(a)f(b) + \varphi(1, 0)f(a)f_1(b) \\ + \varphi(0, 1)f_1(a)f(b) + \varphi(0, 0)f_1(a)f_1(b),$$

quindi, sviluppando le ψ , ψ_1 , f , f_1 , per a e b :

$$f(1)[\psi(1, 1)ab + \psi(1, 0)a_1b + \psi(0, 1)a_1b + \psi(0, 0)a_1b_1] \\ + f(0)[\psi_1(1, 1)ab + \psi_1(1, 0)a_1b + \psi_1(0, 1)a_1b + \psi_1(0, 0)a_1b_1] \\ = \varphi(1, 1)[f(1)a + f(0)a_1][f(1)b + f(0)b_1] + \varphi(1, 0)[f(1)a \\ + f(0)a_1][f_1(1)b + f_1(0)b_1] + \varphi(0, 1)[f_1(1)a + f_1(0)a_1][f(1)b \\ + f(0)b_1] + \varphi(0, 0)[f_1(1)a + f_1(0)a_1][f_1(1)b + f_1(0)b_1]$$

(¹) Uso la notazione dello SCHRÖDER.

e sussistendo l'(1) per i valori speciali 0 ed 1 di a e b , si ottiene, coll'eguagliare i coefficienti dei costituenti ab, ab_1, a_1b, a_1b_1 :

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} f(1)\psi(1, 1) + f(0)\psi_1(1, 1) = f(1)\varphi(1, 1) + f_1(1)\varphi(0, 0) \\ f(1)\psi(1, 0) + f(0)\psi_1(1, 0) = f(0)f(1)\varphi(1, 1) + f_1(0)f(1)\varphi(0, 1) \\ \quad + f(0)f_1(1)\varphi(1, 0) + f_1(0)f_1(1)\varphi(0, 0) \\ f(1)\psi(0, 1) + f(0)\psi_1(0, 1) = f(0)f(1)\varphi(1, 1) + f(0)f_1(1)\varphi(0, 1) \\ \quad + f_1(0)f(1)\varphi(1, 0) + f_1(0)f_1(1)\varphi(0, 0) \\ f(1)\psi(0, 0) + f(0)\psi_1(0, 0) = f(0)\varphi(1, 1) + f_1(0)\varphi(0, 0) . \end{array} \right.$$

Risolvendo questo sistema d'equazioni per $f(0)$ e $f(1)$, la funzione f è pienamente determinata.

Così — cito i casi più semplici — le funzioni

$$f(a) = a + m, \quad f(a) = a.m,$$

cioè la somma ed il prodotto logico, godono le proprietà funzionali

$$\begin{array}{ll} f(a+b) = f(a) + f(b) & [\text{come la } f(a) = am \text{ dell'algebra}] \\ f(a.b) = f(a).f(b) & [\text{come la } f(a) = m^a]. \end{array}$$

Diffatti, essendo per la prima proprietà:

$$\begin{array}{l} \psi(a, b) = a + b, \\ \varphi[f(a), f(b)] = f(a) + f(b) \end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{l} \psi(1, 1) = \psi(1, 0) = \psi(0, 1) = 1, \\ \psi(0, 0) = 0, \\ \varphi(1, 1) = \varphi(1, 0) = \varphi(0, 1) = 1, \\ \varphi(0, 0) = 0, \end{array}$$

la seconda o la terza equazione del sistema (3) danno la condizione

$$f(0)f_1(1) = 0,$$

che è manifestamente soddisfatta dai valori

$$f(0) = m, \quad f(1) = 1,$$

della somma e

$$f(0) = 0, \quad f(1) = m,$$

del prodotto logico.

Alla seconda proprietà corrisponde la medesima equazione condizionale.

In modo analogo si accerta che la negazione logica:

$$f(a) = a_1$$

possiede i due teoremi funzionali

$$\begin{array}{ll} f(a+b) = f(a).f(b) & [\text{come la } f(a) = \log a] \\ f(a.b) = f(a) + f(b) & [\text{come la } f(a) = a^m]. \end{array}$$

soddisfacendo alla condizione

$$f(1)f_1(0) = 0.$$

All'incontro non v'è alcuna funzione logica che goda la proprietà

$$f(a + b) = f(a)f_1(b) + f_1(a)f(b)$$

[come, posto $f_1(a) = \cos a$, la $f(a) = \sin a$],

perchè la prima e la quarta equazione in (3) dànno allora

$$f(1) = f(0) = 0,$$

cioè, per qualsiasi a ,

$$f(a) = 0.$$

Velletri, Novembre 1892.

ALBINO NAGY.

